

Über Lückenprozesse mit beschränkten Lücken

von
Wilhelm Baumann
aus Waldmünchen

ÜBER LÜCKENPROZESSE
MIT BESCHRÄNKTEN LÜCKEN

Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Wilhelm Baumann
aus Waldmünchen

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 1962

Dekan: Universitätsprofessor Dr. H. Volz

1. Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. W. Specht
2. Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. H.-J. Kowalsky

MEINER FRAU GEWIDMET



1. Einleitung.

Lückenprozesse mit beschränkten, voneinander unabhängigen Lücken wurden zuerst von Akaike (1) und dann von Wever (4) untersucht. Akaike zeigte, daß ein solcher Prozeß eine stetige Spektraldichte besitzt. Diese Spektraldichte wurde von Wever explizit angegeben; sie ergab sich als rationale Funktion von $e^{2\pi i \lambda}$.

In der vorliegenden Arbeit werden nun "Markoffsche Lückenprozesse" betrachtet; das sind Lückenprozesse, bei denen die Lückenlänge L_1 von endlich vielen vorausgegangenen Lücken abhängt. Es wird gezeigt, daß auch für diese Markoffschen Lückenprozesse eine stetige, in $e^{2\pi i \lambda}$ rationale Spektraldichte existiert.

Im zweiten Teil der Arbeit wird aus einem Lückenprozeß mit unabhängigen Lücken eine Markoffsche Kette konstruiert, deren "Zustände" Abschnitte der Länge M (M = maximale Lückenlänge) aus dem Lückenprozeß sind. Für diese Markoffsche Kette werden die stationären Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet. Bemerkenswert ist, daß aus der Gleichverteilung der Lücken keineswegs folgt, daß die stationären Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Zustände gleich groß sind. Durch eine geeignete Wahl der Lückenwahrscheinlichkeiten kann dies jedoch stets erreicht werden.

Abschließend wird die nahe Verwandtschaft zwischen Lückenprozessen und Markoffschen Ketten gezeigt.

2. Zusammenstellung der in der Arbeit verwendeten Definitionen und Sätze.

Die auftretenden Zufallsvariablen sollen reell sein.

Definition: Ein stochastischer Prozeß $\{x_t; t \in T\}$ heißt diskreter Parameterprozeß, wenn die Parametermenge T abzählbar ist.

Im folgenden werden wir nur diskrete Parameterprozesse untersuchen.

Definition: Ein stochastischer Prozeß $\{x_t; t \in T\}$ heißt im weiteren Sinn stationär, wenn folgendes gilt:

1. $E\{x_t^2\} < \infty$ für alle $t \in T$
2. $E\{x_{s+t}x_s\} = R(t)$ (unabhängig von s)

Die Funktion $R(t)$ heißt die Kovarianzfunktion des Prozesses. Sie läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$R(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi t \lambda \, dG(\lambda).$$

Die Funktion $G(\lambda)$ - die "spektrale Verteilungsfunktion" - ist bei geeigneter Normierung eindeutig durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\frac{G(\lambda+) + G(\lambda-)}{2} - G(0) = 2R(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R(n) \frac{\sin 2\pi n \lambda}{n}$$

$$0 < \lambda < \frac{1}{2}$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) - G(0) = R(0)$$

Ist die spektrale Verteilungsfunktion totalstetig, dann hat sie fast überall eine Ableitung $G'(\lambda)$, die man aus

$$G'(\lambda) = 2R(0) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} R(n) \cos 2\pi n \lambda$$

erhält. $G'(\lambda)$ heißt spektrale Dichtefunktion.

Konvergiert $\sum_1^{\infty} |R(n)|$, dann existiert eine stetige spektrale Dichtefunktion.

Definition: Ein stochastischer Prozeß $\{x_t; t \in T\}$ heißt im strengen Sinn stationär, wenn für beliebige $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ($n=1, 2, \dots$) und beliebige Werte von τ (wobei jedoch $t_v + \tau$ ($v=1, \dots, n$) aus T sein soll) die folgende Gleichung gilt:

$$F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau}).$$

Dabei ist $F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $x_{t_1}, \dots, x_{t_n}$.

Aus dieser Definition folgt für $n = 1$:

$$F(x_t) = F(x_{t+\tau}).$$

Alle Variablen haben daher die gleiche Verteilung.

Jeder im strengen Sinn stationäre Prozeß, bei welchem für alle $t \in T$ $E\{x_t^2\} < \infty$ ist, ist auch im weiteren Sinn stationär.

Eine ausführliche Darstellung dieser Begriffe findet man z.B. bei Doob (2).

3. Lückenprozesse.

Wir betrachten nun im strengen Sinn stationäre stochastische Prozesse, deren Zufallsvariable nur die Werte 0 oder 1 annehmen, sogenannte Null-Eins-Prozesse. Es besteht dann eine von t unabhängige Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Eins: $p\{x_t = 1\} =_{\text{Def}} P.$

Definition: Ist in einem Null-Eins-Prozeß $x_n = 1$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{n+k-1} = 0$, $x_{n+k} = 1$, dann sagen wir: Im Prozeß ist eine Lücke der Länge k aufgetreten.

Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 1$ annehmen dürfen, können wir die im Prozeß aufgetretenen Lücken abzählen; L_v sei die Länge der v -ten Lücke.

Definition: Ein Null-Eins-Prozeß heißt Lückenprozeß, wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p\{L_v = k_v | L_{v-1} = k_{v-1}, \dots, L_1 = k_1\}$$

für jedes v gegeben sind.

Ein Lückenprozeß heißt Lückenprozeß mit beschränkten Lücken, wenn für alle v $L_v \leq M$ gilt.

Weiterhin sei unter einem Lückenprozeß stets ein Lückenprozeß mit beschränkten Lücken verstanden.

Wegen ihres einfachen Aufbaus sind unter den Lückenprozessen zwei Typen von besonderer Bedeutung:

a) Lückenprozesse mit unabhängigen Lücken.

Hier ist

$$p\{L_v=k_v | L_{v-1}=k_{v-1}, \dots, L_1=k_1\} = p\{L_v=k_v\}.$$

Dieser Typ wurde von Akaike (1) und Wever (4) untersucht. Es wurde gezeigt, daß ein solcher Prozeß stets eine stetige Spektraldichte hat, die man explizit angeben kann. (4)

b) Markoffsche Lückenprozesse.

Hier ist

$$p\{L_v=k_v | L_{v-1}=k_{v-1}, \dots, L_1=k_1\} = p\{L_v=k_v | L_{v-1}=k_{v-1}\}.$$

Die Lückenlängen bilden also eine endliche, homogene Markoffsche Kette.

Mit diesem Typ wollen wir uns zunächst beschäftigen.

4. Markoffsche Lückenprozesse.

Wir treffen die folgenden Voraussetzungen:

Die "Übergangswahrscheinlichkeiten" p_{ik} seien definiert durch

$$p\{L_v = k | L_{v-1} = i\} = p_{ik}.$$

Dabei sei für alle v $L_v \leq M$ und mindestens ein p_{iM} ($i=1,2,\dots,M-1$) sei positiv. (M :maximale Lückenlänge).

Die "Anfangswahrscheinlichkeiten" p_i seien definiert durch

$$p_i = P\{x_0=1, x_1=\dots=x_{i-1}=0, x_i=1\}$$

$$(i = 1, 2, \dots, M)$$

Die dadurch definierte Markoffsche Kette sei ergodisch, d.h. irreduzibel und nicht periodisch. (Eine Erläuterung dieser Begriffe findet man z.B. bei Feller (3)).

Aus diesen Voraussetzungen folgt (s. Feller (3)):

Das Ereignis $x_n = 1$ ist gewiß wiederkehrend; setzt man $P_n = P\{x_n = 1\}$, dann existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P.$$

Die Kovarianzfunktion $R(n)$ des Prozesses $\{x_n - P\}$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} R(n) = E\{(x_{m+n}-P)(x_m-P)\} &= E\{x_{m+n}x_m\} - P \cdot E\{x_{m+n}\} \\ &- P \cdot E\{x_m\} + P^2 = P(P_n - P). \end{aligned}$$

Wir beweisen nun den folgenden

Satz 1: Für jeden Markoffschen Lückenprozeß konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |P(P_n - P)|.$$

Beweis: Wir definieren

$$\pi_{ik}(n) = P\{x_n=1, x_{n-k}=1, x_{n-k-i}=1, x_{n-j}=0 \text{ für } j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, k+i-1\}.$$

$\pi_{ik}(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mit $x_n = 1$ eine Lücke der Länge k abgeschlossen wurde und die vorhergehende Lücke die Länge i hatte.

a) Zunächst sei $n > M$.

Für die $\pi_{ik}(n)$ erhält man dann die folgende Rekursionsformel:

$$\pi_{ik}(n) = \sum_{r=1}^M \pi_{ri}(n-k) \cdot p_{irk}$$

Summiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung über i und definiert

$$a_k(n) = \sum_{i=1}^M \pi_{ik}(n),$$

dann erhält man für die $a_k(n)$ das lineare Differenzengleichungssystem

$$a_k(n) = \sum_{i=1}^M a_i(n-k) \cdot p_{irk}$$

($k = 1, 2, \dots, M$).

b) Für $n = 1, 2, \dots, M$ ergibt sich:

$$a_k(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^M a_i(n-k) \cdot p_{irk} & \text{wenn } n > k \\ p_n & \text{wenn } n = k \\ 0 & \text{wenn } n < k \end{cases}$$

$a_k(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mit $x_n = 1$ eine Lücke der Länge k abgeschlossen wurde.

Die Wahrscheinlichkeiten P_n ergeben sich aus

$$P_n = \sum_{k=1}^M a_k(n).$$

Das lineare Differenzengleichungssystem zur Bestimmung der $a_k(n)$ hat die Gestalt:

$$a_1(n) = p_{11}a_1(n-1) + p_{21}a_2(n-1) + \dots + p_{M1}a_M(n-1)$$

$$a_2(n) = p_{12}a_1(n-2) + p_{22}a_2(n-2) + \dots + p_{M2}a_M(n-2)$$

.

.....

.

$$a_M(n) = p_{1M}a_1(n-M) + p_{2M}a_2(n-M) + \dots + p_{MM}a_M(n-M)$$

Das System hat die Ordnung $1 + 2 + \dots + M = \frac{M(M+1)}{2}$; es muß sich daher durch $\frac{M(M+1)}{2}$ lineare Differenzengleichungen erster Ordnung ersetzen lassen.

Dazu machen wir folgende Substitution:

$$a_1(n-1) = u_1(n)$$

$$a_2(n) = u_2(n) \quad a_2(n-1) = u_{M+1}(n)$$

$$a_3(n+1) = u_3(n) \quad a_3(n) = u_{M+2}(n) \quad . \quad . \quad .$$

.

.

.

.

.

.

$$a_M(n+M-2) = u_M(n) \quad a_M(n+M-3) = u_{2M-1}(n) \quad . \quad . \quad .$$

.....

$$. \quad . \quad a_{M-1}(n-1) = \frac{u_{M(M+1)}}{2} - 2$$

$$. \quad . \quad a_M(n) = \frac{u_{M(M+1)}}{2} - 1 \quad a_M(n-1) = \frac{u_{M(M+1)}}{2}$$

Damit erhalten wir für die Funktionen $u_k(n)$ das folgende lineare Differenzengleichungssystem, das

$$\begin{aligned} u_1(n+1) &= p_{11}u_1(n) + p_{21}u_{M+1}(n) + \dots + p_{M1}u_{\frac{M(M+1)}{2}}(n) \\ u_2(n+1) &= p_{12}u_1(n) + p_{22}u_{M+1}(n) + \dots + p_{M2}u_{\frac{M(M+1)}{2}}(n) \\ &\dots \dots \dots \\ u_M(n+1) &= p_{1M}u_1(n) + p_{2M}u_{M+1}(n) + \dots + p_{MM}u_{\frac{M(M+1)}{2}}(n) \\ u_{M+1}(n+1) &= u_2(n) \\ &\dots \dots \dots \\ u_{2M-1}(n+1) &= u_M(n) \\ u_{2M}(n+1) &= u_{M+2}(n) \\ &\dots \dots \dots \\ u_{\frac{M(M+1)}{2}}(n+1) &= u_{\frac{M(M+1)}{2}}(n) - 1 \end{aligned}$$

die Matrix A die folgende Gestalt hat:

	1	2	...	M	M+1	M+2	...	$\frac{M(M+1)}{2}$	- 1	$\frac{M(M+1)}{2}$
1	P_{11}	0	...	0	P_{21}	0	...	0		P_{M1}
2	P_{12}	0	...	0	P_{22}	0	...	0		P_{M2}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
M	P_{1M}	0	...	0	P_{2M}	0	...	0		P_{MM}
M+1	0	1	...	0	0	0	...	0		0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2M-1	0	0	...	1	0	0	...	0		0
2M	0	0	...	0	0	1	...	0		0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\frac{M(M+1)}{2}$	0	0	...	0	0	0	...	1		0

Mit Hilfe der Substitutionsgleichungen stellt man leicht fest, daß die Matrix A die konstante Spaltensumme 1 hat.

Daraus folgt (5), daß A den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ hat. Für alle anderen Eigenwerte gilt $|\lambda| < 1$.

Die Funktionen $a_k(n)$ und damit auch die Wahrscheinlichkeiten P_n müssen sich also wie folgt darstellen lassen:

$$P_n = C_1 + C_2 \lambda_2^n + \dots + \frac{C_{\frac{M(M+1)}{2}}}{2} \lambda_{\frac{M(M+1)}{2}}^n.$$

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ folgt $C_1 = P$.

Daraus ergibt sich nun wie bei Akaike

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R(n)| = P \sum_{n=1}^{\infty} |P_n - P| = P \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{\frac{M(M+1)}{2}} |c_i| |\lambda_i|^n < \infty,$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Die Berechnung der spektralen Dichtefunktion $G'(\lambda)$ kann nun auf dem von Wever (4) angegebenen Weg erfolgen. An die Stelle des dort auftretenden charakteristischen Polynoms

$$p(z) = z^k - p_1 z^{k-1} - \dots - p_k$$

der Differenzengleichung tritt hier das charakteristische Polynom der Matrix A, das wir in gleicher Weise schreiben können ($k = \frac{M(M+1)}{2}$).

Die Beziehung $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ gilt (wegen des Eigenwertes $\lambda_1 = 1$) auch hier.

Man kann daher auch das Polynom

$$p_0(z) = \frac{p(z)}{z-1} = \sum_{i=0}^{k-1} B_i z^i$$

bilden. Aus den beiden Beziehungen

$$P_n = \sum_{v=1}^k P_{n-v} p_v \quad \text{und} \quad R(n) = P(P_n - P)$$

folgt die für das Verfahren wesentliche Rekursionsformel

$$\sum_{i=0}^{k-1} B_i R(m+i) = 0 \quad (m \geq 0).$$

Der Ansatz $H(z) = p_0(z) \cdot p_0\left(\frac{1}{z}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(n) \cdot z^n$ führt auf

$$G'(\lambda) = \frac{H(e^{2\pi i \lambda})}{|p_0(e^{2\pi i \lambda})|^2}.$$

Wegen der angegebenen Rekursionsformel bricht jedoch die Reihe für $H(z)$ ab, d.h. $H(z)$ ist ein Polynom.

Damit haben wir den

Satz 2: Jeder Markoffsche Lückenprozeß besitzt eine in $e^{2\pi i \lambda}$ rationale Spektral-dichte.

Beispiel: $M = 2$.

Das Differenzengleichungssystem zur Bestimmung der $a_k(n)$ lautet hier:

$$a_1(n) = p_{11}a_1(n-1) + p_{21}a_2(n-1)$$

$$a_2(n) = p_{12}a_1(n-2) + p_{22}a_2(n-2)$$

Mit der Substitution

$$a_1(n-1) = u_1(n), a_2(n) = u_2(n), a_2(n-1) = u_3(n)$$

geht es über in

$$\tilde{w}_{n+1} = A \tilde{w}_n,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{21} \\ p_{12} & 0 & p_{22} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\tilde{w} = (u_1(n), u_2(n), u_3(n))$ ist.

Das charakteristische Polynom von A

$$z^3 - p_{11}z^2 - p_{22}z + (p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})$$

hat die Nullstellen

$$z_1 = 1 \quad z_{2,3} = -\frac{p_{12}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_{12}}{2} - 1\right)^2 - p_{21}}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $|z_{2,3}| < 1$ ist

$$1 - p_{22} > 0 \quad 1 - p_{12} + p_{22} > 0.$$

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann ist die Markoffsche Kette nicht ergodisch, im Widerspruch zur Voraussetzung auf Seite 8.

Denn dann ist entweder $p_{22} = 1$ oder $p_{12} = 1$ und $p_{22} = 0$. Im ersten Fall würde der Zustand 2 eine abgeschlossene Teilmenge bilden, im zweiten Fall hätte jeder der beiden Zustände die Periode zwei.

Es ist nun

$$P_n = C_1 + C_2 z_2^n + C_3 z_3^n.$$

Schreibt man diese Gleichung noch für den Index $n+1$ sowie den Index $n+2$ an, dann erhält man daraus

$$C_1 = \frac{(1-p_{11}-p_{22})P_n + (1-p_{11})P_{n+1} + P_{n+2}}{3 - 2p_{11} - p_{22}}$$

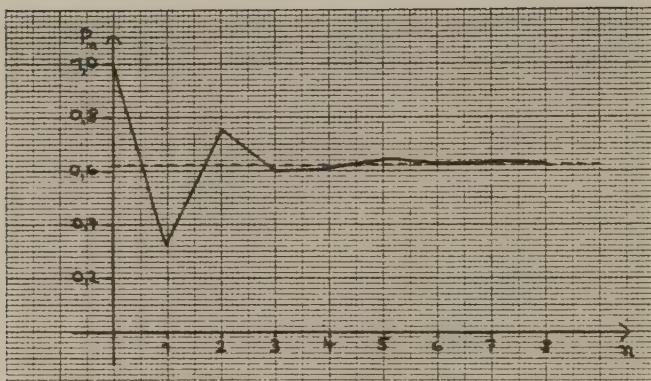
Setzt man hier drei aufeinanderfolgende Werte von P_n ein, dann ergibt sich schließlich

$$C_1 = P = \frac{2 - p_{11} - p_{22}}{3 - 2p_{11} - p_{22}}.$$

Das Zahlenbeispiel

$$P_1 = \frac{1}{3} \quad P_2 = \frac{2}{3} \quad (P_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

zeigt die rasche Annäherung von P_n an den Grenzwert $P = \frac{5}{8}$.



Als spektrale Dichtefunktion erhält man nach dem angegebenen Verfahren

$$G'(\lambda) = \frac{15 + 5 \cdot \cos 2\pi\lambda}{104 + 120 \cdot \cos 2\pi\lambda + 32 \cdot \cos 4\pi\lambda} \cdot$$

Bemerkung: Ist die Übergangsmatrix (p_{ij}) doppelt stochastisch (d.h. hat sie auch die konstante Spaltensumme 1), dann sind nach einem bekannten Satz aus der Theorie der Markoffschen Ketten (3) alle Lücken gleich wahrscheinlich. Ist überdies $p_{ij} = \frac{1}{M}$ ($i, j = 1, \dots, M; M = \text{maximale Lückenlänge}$), dann sind die Lücken unabhängig.

5. Verallgemeinerte Markoffsche Lückenprozesse.

Bei den bisher betrachteten Markoffschen Lückenprozessen war die Lückenlänge L_v nur von der Länge L_{v-1} der unmittelbar vorausgegangenen Lücke abhängig.

Nun betrachten wir Lückenprozesse, bei denen die Lückenlänge L_v von endlich vielen vorausgegangenen Lücken abhängt:

$$\begin{aligned} & p\{L_v = k_v | L_{v-1} = k_{v-1}, L_{v-2} = k_{v-2}, \dots, L_1 = k_1\} \\ & = p\{L_v = k_v | L_{v-1} = k_{v-1}, \dots, L_{v-N} = k_{v-N} \\ & \stackrel{\text{Def}}{=} P_{k_{v-N} \dots k_v}. \end{aligned}$$

Dabei sei N die Anzahl der Lücken, von denen die Lückenlänge L_v abhängt (bisher war $N = 1$); die Lückenlänge sei nach wie vor beschränkt: $L \leq M$.

Man kann nun die im Abschnitt 4 angestellten Überlegungen wiederholen; dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \pi_{k_1 \dots k_{N+1}}(n) &= p\{x_n = 1, x_{n-k_1} = 1, \dots, x_{n-k_1 - \dots - k_{N+1}} = 1, \\ & x_{n-j} = 0 \text{ für } j = 1, \dots, k_1 - 1, k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2 + \dots + k_{N+1} - 1\} \end{aligned}$$

$\pi_{k_1 \dots k_{N+1}}(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mit dem Ereignis $x_n = 1$ eine Lücke der Länge k_{N+1} abgeschlossen wurde und die N vorausgegan-

nen Lücken die Längen $k_N, \dots, k_1$ hatten.

Die $\pi_{k_1 \dots k_{N+1}}(n)$ genügen folgender Rekursionsformel:

$$\pi_{k_1 \dots k_{N+1}}(n) = \sum_{r=1}^M \pi_{rk_1 \dots k_N}(n-k_{N+1}) \cdot p_{k_1 \dots k_{N+1}}.$$

Setzt man

$$\sum_{k_1=1}^M \pi_{k_1 \dots k_{N+1}}(n) = a_{k_2 \dots k_{N+1}}(n),$$

dann ergibt sich aus der Rekursionsformel durch Summation über k_1 das lineare Differenzengleichungssystem

$$a_{k_2 \dots k_{N+1}}(n) = \sum_{k_1=1}^M a_{k_1 \dots k_N}(n-k_{N+1}) \cdot p_{k_1 \dots k_{N+1}}.$$

Dieses System der Ordnung $s = \frac{M^N(M+1)}{2}$ für die M^N Funktionen $a_{k_2 \dots k_{N+1}}(n)$ hat aber den gleichen Aufbau, wie das im Fall $N = 1$ erhaltene System (Seite 9); durch eine entsprechende Substitution erhält man ein System mit s Gleichungen erster Ordnung, dessen zugehörige Matrix A ebenfalls die konstante Spaltensumme 1 hat.

Wegen

$$\sum_{k_1, \dots, k_N=1}^M a_{k_1 \dots k_N}(n) = P_n$$

gilt auch hier

$$P_n = C_1 + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_s \lambda_s^n,$$

woraus wieder die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |P(P_n - P)|$ folgt. Die Berechnung der spektralen Dichtefunktion kann wie oben angegeben erfolgen.

Wir erhalten damit den

Satz 3: Jeder verallgemeinerte Markoffsche Lückenprozeß besitzt eine in $e^{2\pi i \lambda}$ rationale Spektraldichte.

6. Berechnung der stationären Übergangswahrscheinlichkeiten für einen weiteren Sonderfall.

Eine Markoffsche Kette habe die Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$. Die Elemente der n -ten Potenz ($n = 1, 2, \dots$) dieser Matrix seien mit $p_{ij}^{(n)}$ bezeichnet. $p_{ij}^{(n)}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man in n Schritten vom Zustand i zum Zustand j gelangt.

Bei einer ergodischen Markoffschen Kette existiert bekanntlich (3) der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} =_{\text{Df}} v_j \quad (\text{Unabhängig von } i);$$

die v_j heißen dann die stationären Übergangswahrscheinlichkeiten der Markoffschen Kette. Sie sind durch die folgenden Gleichungen eindeutig bestimmt:

$$v_j = \sum_{i=1}^l v_i \cdot p_{ij} \quad \sum_{j=1}^l v_j = 1$$

(l ist die "Länge der Markoffschen Kette, d.h. die Anzahl ihrer Zustände).

Diese stationären Übergangswahrscheinlichkeiten sollen nun für einen Lückenprozeß mit unabhängigen Lücken berechnet werden. Als Zustand werde ein Abschnitt der Länge M (M = maximale Lückenzahl) angesehen: $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+M}\}$. Da ein solcher Abschnitt mindestens eine Eins enthalten muß, gibt es höchstens $2^M - 1$ Zustände, die eine Markoffsche Kette bilden.

Man muß dem Abschnitt mindestens die Länge M geben, denn sonst wäre der folgende Abschnitt von wenigstens zwei Vorgängern abhängig.

Die Zustände sollen - als Dualzahlen gelesen - in ihrer natürlichen Reihenfolge beziffert werden, also

$$\begin{array}{l} 1) \quad 0 \dots 001 \\ 2) \quad 0 \dots 010 \\ 3) \quad 0 \dots 011 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ 2^M - 1) \quad 1 \dots 111 \end{array}$$

Man sieht sofort, daß nur die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i, (2i)}$, und $p_{i, (2i+1)}$, von Null verschieden sein können.

($i \neq 2^{M-1}$; $p_{2^{M-1},1} = 1$; (a)' bedeutet die durch a modulo 2^M bestimmte Restklasse)

Bezeichnet man die auf Seite 7 definierten Lückenwahrscheinlichkeiten wieder mit $p_1, p_2, \dots, p_M$ und setzt $1 - p_1 - \dots - p_\alpha = \frac{B_{\alpha+1}}{B_{\alpha+1}}$ ($\alpha = 1, \dots, M$; $B_1 =_{\text{Def}} 1$), dann kann man die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt ausdrücken:

$$p_{2i+1, (2(2i+1))'} = 1 - p_1$$

$$p_{2i+1, (2(2i+1)+1)} = p_1$$

$$p_{2i, (2 \cdot 2i)} = \frac{B_{\alpha+2}}{B_{\alpha+1}}$$

$$p_{2i, (2 \cdot 2i + 1)} = \frac{p_{\alpha+1}}{B_{\alpha+1}}$$

α ist der Exponent von 2 in der Primfaktorzerlegung der Zahl $2i$: $2i = 2^\alpha 3^{\beta} 5^{\gamma} \dots$. In der dualen Darstellung ist α die Anzahl der am Ende stehenden Nullen.

Die angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich folgendermaßen:

$p_{2i+1, (2(2i+1))'}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf eine 1 wieder eine 1 folgt, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Lücke der Länge Eins.

$P_{2i+1, (2(2i+1))}$, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf eine 1 eine 0 folgt, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das komplementäre Ereignis.

$P_{2i, (2 \cdot 2i + 1)}$, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Lücke der Länge $\alpha + 1$, wenn schon eine Lücke der Länge α aufgetreten ist.

$P_{2i, (2 \cdot 2i)}$, ist die Wahrscheinlichkeit für das dazu komplementäre Ereignis.

Beispiel: $M = 10$.

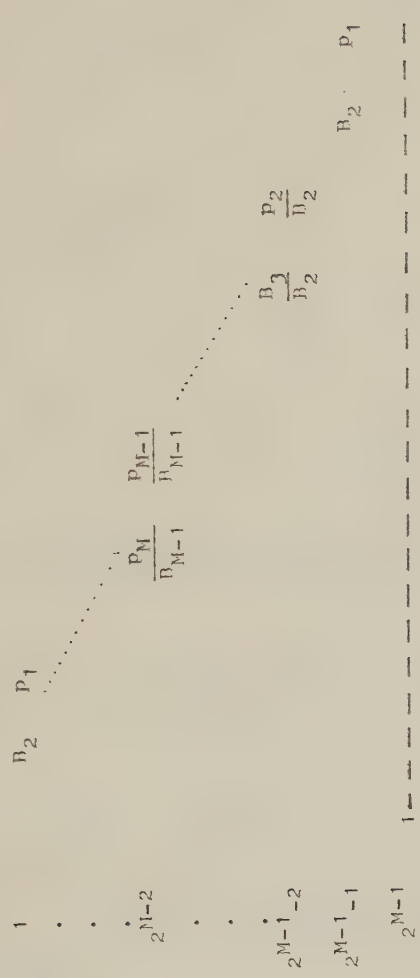
Es gibt höchstens $2^{10} - 1 = 1023$ Zustände.

$$P_{759,494} = 1 - P_1 \qquad P_{759,495} = P_1$$

$$P_{64,128} = \frac{B_8}{B_7} \qquad P_{64,129} = \frac{P_7}{B_7}$$

Wir erhalten somit die folgende stochastische Matrix (s. nächste Seite):

1 2 3 . . . 2^{M-1} 2^{M-1}+1 . . . 2^{M-4} 2^{M-3} 2^{M-2} 2^{M-1}



(Fortsetzung wie oben)

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der stationären Übergangswahrscheinlichkeiten hat demnach die folgende Gestalt:

$$v_1 = v_{2^{M-1}}$$

$$v_{2n} = (1 - p_1) \cdot (v_n + v_{(2^{M-1} + n)})$$

$$v_{2n+1} = p_1 \cdot (v_n + v_{(2^{M-1} + n)})$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, 2k+1, \dots$$

$$v_{4n} = \frac{B_{\alpha+2}}{B_{\alpha+1}} \cdot (v_{2n} + v_{(2^{M-1} + 2n)})$$

$$v_{4n+1} = \frac{P_{\alpha+1}}{B_{\alpha+1}} \cdot (v_{2n} + v_{(2^{M-1} + 2n)})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots; 2n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \dots$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung denke man sich den Index n als Dualzahl geschrieben:

$$n = a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1 a_0,$$

wobei $a_i = 0$ oder 1 ist. $v_1, v_2, \dots, v_z$ seien diejenigen Indices, für welche $a_v = 1$ ist. z ist die Anzahl der Einsen, welche in der Dualentwicklung von n auftreten.

Dann gilt der folgende

Satz 4: Die Lösung des Gleichungssystems für die stationären Übergangswahrscheinlichkeiten lautet

$$v_n = \frac{\sum_{i=M-v_n}^M p_i \cdot p_{v_n - v_{n-1}} \cdot p_{v_{n-1} - v_{n-2}} \cdots p_{v_2 - v_1} B_{v_1+1}}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$$

wenn $z > 1$ ist und

$$v_n = \frac{\sum_{i=M-v_n}^M p_i \cdot B_{v_1+1}}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$$

wenn $z = 1$ ist. ($n = 1, 2, \dots, 2^M - 1$)

Beweis: Er ergibt sich durch Einsetzen von v_n in das Gleichungssystem (Seite 24).

$n = 1$: Aus $z = 1$ und $v_1 = 0$ folgt $v_1 = \frac{p_M}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$.

$n = 2^{M-1}$: Aus $z = 1$ und $v_1 = M - 1$ folgt

$$v_{2^{M-1}} = \frac{B_M}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i} = \frac{p_M}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}.$$

Damit ist die erste der angegebenen Gleichungen verifiziert.

Um die zweite Gleichung zu bestätigen, setzen wir $n = 3^{\beta} 5^{\gamma} \dots = d \ 0 \dots 1$; wir setzen ferner $n < 2^{M-1}$ voraus, so daß die Dualentwicklung von n mit einer Null beginnt. (Für $n > 2^{M-1}$ verläuft der Beweis analog)

Da $v_1 = 0$ ist, wird

$$v_n = \frac{\sum_{i=1}^M p_i \cdot p_{v_2 - v_{z-1}} \cdot \dots \cdot p_{v_z}}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$$

Die Dualentwicklung von $2^{M-1} + n$ ist bis auf eine Eins am Anfang dieselbe, wie die von n :

$$2^{M-1} + n = d \ 1 \dots 1$$

Die Anzahl z der Einsen hat um 1 zugenommen; die Zahlen $v_1 = 0$, $v_2, \dots, v_z$ ändern sich nicht.

Daher ist

$$v_{2^{M-1} + n} = \frac{p_{M-1-v_z} p_{v_z - v_{z-1}} \dots p_{v_2}}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$$

Die Dualentwicklung von $2n$ hat am Schluß eine Null mehr als die von n :

$$2n = d \ 0 \dots 10$$

Die Anzahl z der Einsen ändert sich nicht; $v_1, v_2, \dots, v_z$ nehmen alle um 1 zu.

Infolgedessen ist

$$v_{2n} = \frac{\sum_{i=M-v_2-1}^M p_i \cdot p_{v_2-v_{2-1}} p_{v_{2-1}-v_{2-2}} \cdots p_{v_2} B_2}{\sum_1^M i \cdot p_i}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{v_{2n}}{v_n + v_{2^{M-1} + n}} = \frac{\sum_{M-v_2-1}^M p_i \cdot B_2}{\sum_{M-v_2}^M p_i + p_{M-1-v_2}} = B_2 = 1 - p_1.$$

Damit ist auch die zweite der angegebenen Gleichungen bestätigt. Da die Rechnung für die dritte Gleichung analog verläuft, übergehen wir diese und wenden uns gleich der vierten zu:

$$\text{Es sei } 2n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \dots = d \underbrace{0 \dots 1000 \dots 0}_{\alpha \text{ Nullen}}$$

Wir setzen ferner wieder $2n < 2^{M-1}$ voraus, so daß die Dualentwicklung von $2n$ (M -stellig geschrieben) ebenfalls mit einer Null beginnt.

Wegen $v_1 = \alpha$ ist

$$v_{2n} = \frac{\sum_{M-v_2}^M p_i \cdot p_{v_2-v_{2-1}} p_{v_{2-1}-v_{2-2}} \cdots p_{v_2-\alpha} B_{\alpha+1}}{\sum_1^M i \cdot p_i}$$

Die Dualentwicklung von $2^{M-1} + 2n$ unterscheidet sich von der Dualentwicklung von $2n$ nur durch eine Eins am Anfang:

$$2^{M-1} + 2n = d \cdot \underbrace{1 \dots 1000 \dots 0}_{\alpha \text{ Nullen}}$$

Die Anzahl z der Einsen hat um 1 zugenommen; die Zahlen $v_1 = \alpha$, $v_1, \dots, v_z$ ändern sich nicht.

Daher ist

$$v_{2^{M-1} + 2n} = \frac{p_{M-1-v_z} p_{v_z-v_{z-1}} \dots p_{v_z-\alpha} B_{\alpha+1}}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$$

Die Dualentwicklung von $4n$ hat am Schluß eine Null mehr als die von $2n$:

$$4n = d \cdot \underbrace{0 \dots 1000 \dots 00}_{\alpha+1 \text{ Nullen}}$$

Die Anzahl z der Einsen ändert sich nicht; die Zahlen $v_1, v_2, \dots, v_z$ nehmen alle um 1 zu.

Daher ist

$$v_{4n} = \frac{\sum_{i=1}^M p_i \cdot p_{v_z-v_{z-1}} p_{v_{z-1}-v_{z-2}} \dots p_{v_z-\alpha} B_{\alpha+2}}{\sum_{i=1}^M i \cdot p_i}$$

Daraus ergibt sich wie oben:

$$\frac{v_{4n}}{v_{2n+v_{2^{M-1}}+2n}} = \frac{\sum_{M-v_1-1}^M p_i \cdot B_{\alpha+2}}{(\sum_{M-v_1}^M p_i + p_{M-v_1-1}) \cdot B_{\alpha+1}} = \frac{B_{\alpha+2}}{B_{\alpha+1}}$$

Die Rechnung für die fünfte Gleichung verläuft analog.

Nun müssen wir noch zeigen, daß $\sum_1^{2^M-1} v_n = 1$ ist.

Da aber für $2^{v_n} \leq n \leq 2^{v_n+1} - 1$ der Faktor $\sum_{M-v_n}^M p_i$ sich nicht ändert und die übrigen Faktoren gerade die Summe 1 haben (Beweis durch vollständige Induktion), ist die Summe aller Zähler der v_n gleich $\sum_1^M i \cdot p_i$.

Satz 5: Ist $p_i = 2^{-i}$ ($i = 1, 2, \dots, M-1$) und $p_M = 2^{-(M-1)}$, dann ist $v_1 = v_2 = \dots = v_{2^M-1} = (2^M - 1)^{-1}$.

Beweis: Setzt man in die auf Seite 25 angegebene Lösung die Werte für die p_i ein, dann erhält man:

$$v_n = \frac{(\sum_{M-v_1}^M 2^{-i} + 2^{-(M-1)}) \cdot 2^{-(v_1-v_1-1)} 2^{-(v_1-v_1-2)} \dots 2^{-(v_1-v_1)} (1 - \sum_1^{v_1} 2^{-i})}{\sum_1^{M-1} i \cdot 2^{-i} + M \cdot 2^{-(M-1)}}$$

$$= \frac{[2^{-M+V_1} \cdot 2(1 - 2^{-V_1}) + 2^{-(M-1)}] \cdot 2^{V_1-V_2} 2^{-V_1}}{2 - (M+1) \cdot 2^{-(M-1)} + M \cdot 2^{-(M-1)}}$$

$$= \frac{2^{-(M-1)}}{2 - 2^{-(M-1)}} = \frac{1}{2^M - 1}.$$

Ist dagegen $p_1 = p_2 = \dots = p_M = \frac{1}{M}$, dann wird

$$v_n = \frac{2(V_1 + 1)(1 - \frac{1}{M})}{(M+1) \cdot M^2}.$$

Die Gleichverteilung der Lücken hat also keineswegs zur Folge, daß die stationären Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Zustände gleich groß werden.

Beispiel: $M = 3$ ($p_3 > 0$).

Die Übergangsmatrix lautet:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_3}{1-p_1} & \frac{p_2}{1-p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_3}{1-p_1} & \frac{p_2}{1-p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix}$$

Die stationären Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v_1 &= v_4 & v_5 &= \frac{p_2}{1-p_1} (v_2+v_6) \\ v_2 &= (1-p_1)(v_1+v_5) & v_6 &= (1-p_1)(v_3+v_7) \\ v_3 &= p_1(v_1+v_5) & v_7 &= p_1(v_3+v_7) \\ v_4 &= \frac{p_3}{1-p_1} (v_2+v_6) & \sum_{i=1}^7 v_i &= 1 \end{aligned}$$

Es hat die Lösung

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{p_3}{p_1+2p_2+3p_3} & v_5 &= \frac{p_2}{p_1+2p_2+3p_3} \\ v_2 &= \frac{(1-p_1)^2}{p_1+2p_2+3p_3} & v_6 &= \frac{p_1(1-p_1)}{p_1+2p_2+3p_3} \\ v_3 &= \frac{p_1(1-p_1)}{p_1+2p_2+3p_3} & v_7 &= \frac{p_1^2}{p_1+2p_2+3p_3} \\ v_4 &= \frac{p_3}{p_1+2p_2+3p_3} \end{aligned}$$

Alle Zustände sind ergodisch, falls $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \neq 0$ ist. Für $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{4}$ wird $v_1 = v_2 = \dots = v_7 = \frac{1}{7}$. Ist dagegen $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$, dann wird $v_1 = \frac{1}{6}$, $v_2 = \frac{2}{9}$, $v_3 = \frac{1}{9}$, $v_4 = \frac{1}{6}$, $v_5 = \frac{1}{6}$, $v_6 = \frac{1}{9}$, $v_7 = \frac{1}{18}$.

7. Abschließende Bemerkungen.

Lückenprozesse sind den Markoffschen Ketten nah verwandt. Denn ist $\{x_n; n=1,2,\dots\}$ ein Lückenprozeß mit beschränkten Lücken, dann kann ein Prozeß $\{z_n; n=1,2,\dots\}$ wie folgt definiert werden:

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x_n = 1 \\ \lambda & \text{wenn } x_{n-\lambda} = 1, x_{n-\lambda+1} = \dots = x_n = 0 \end{cases}$$

λ kann die Werte $1,2,\dots,M-1$ annehmen (M sei die maximale Lückenlänge). Bei jedem Schritt ist nur ein Übergang von λ nach $\lambda+1$ oder von λ nach 0 möglich. Der Prozeß $\{z_n\}$ ist eine Markoffsche Kette mit M Zuständen und der Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} p_1^* & 1-p_1^* & 0 & \dots & 0 \\ p_2^* & 0 & 1-p_2^* & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{M-1}^* & 0 & 0 & \dots & 1-p_{M-1}^* \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $p_i^* = \frac{p_i}{p_{M-i}}$ ($i = 1,2,\dots,M-1$).

Die Matrix hat in der Hauptdiagonalen nur ein von Null verschiedenes Element, nämlich p_1^* , und unterhalb der Hauptdiagonalen nur in der ersten

Geht man nun von dieser Markoffschen Kette wieder zu einem Null-Eins-Prozeß über, bei dem $x_n = 1$ das Erreichen des Nullzustandes bedeutet, dann ist dieser Null-Eins-Prozeß ein Lückenprozeß mit den Lückenwahrscheinlichkeiten

($k = 2, 3, \dots, M$; $p_1 = p_{00}$; p_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots, M-1$) bezeichnet die Elemente der Übergangsmatrix der Markoffschen Kette)

- 33 -

Literatur:

1. Akaike, H., On a zero-one process and some of its applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 8 (1956), 87 - 94.
2. Doob, J.L., *Stochastic Processes*, Wiley and Sons, Inc., New York 1953.
3. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley and Sons, New York 1950.
4. Wever, F., Über stationäre Null-Eins-Prozesse mit beschränkten Lücken, *Math. Zeitschr.* 7 (1959), 283 - 288.
5. Zurmühl, R., *Matrizen*, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

Lebenslauf

Ich wurde am 14. April 1930 in Waldmünchen/Opf. als Sohn des Zollassistenten Christian Baumann und seiner Ehefrau Karoline, geborene Übelhack, geboren.

Im Jahre 1935 wurde mein Vater nach Stuttgart versetzt und dort trat ich im April 1936 in die Volksschule ein. Vom März 1940 bis zum Ende des Krieges besuchte ich die sechsklassige Mittelschule in Stuttgart-Ostheim. Da mein Vater nach Kriegsende nach Fürth/Bay. versetzt wurde, konnte ich diese Schule nicht abschließen. Daher besuchte ich vom Oktober 1946 bis zum Juli 1949 die dreiklassige Städtische Handelsschule in Fürth, die ich mit dem Zeugnis der mittleren Reife verließ. Da mir eine kaufmännische Tätigkeit nicht zusagte, legte ich im September 1949 die Aufnahmeprüfung für die 6. Klasse der Oberrealschule in Fürth ab. Am 17. Juli 1952 erhielt ich das Zeugnis der Hochschulreife.

Von 1952 bis 1956 studierte ich dann an der Universität Erlangen Mathematik und Physik; das Studium schloß ich im Herbst 1956 mit der Wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt an Höheren Schulen ab.

Vom Januar 1957 bis zum November 1958 gehörte ich dem Pädagogischen Seminar an der Oberrealschule Fürth an.

Seit dem 1. Dezember 1958 unterrichte ich an der Staatlichen Akademie für angewandte Technik in Nürnberg Mathematik und Physik.

Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Dr. habil. Franz Wever, Bonn. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle meinen Dank für sein stetes Interesse und für viele wertvolle Hinweise aussprechen.

